অধ্যায় ৩

বীজগাণিতিক রাশি

MAIN TOPIC

- বীজগাণিতিক রাশি
- বর্গ সংবলিত সূত্রাবলি
- ঘন সংবলিত সূত্রাবলি
- উপপাদ্যকে বিশ্লেষণ
- ভাগশেষ উপপাদ্য
- বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র গঠন ও প্রয়োগ

বীজগাণিতিক রাশি

❖ প্রক্রিয়া চিহ্ন এবং সংখ্যানির্দেশক অক্ষর প্রতীক এর অর্থবোধক বিন্যাস হলো বীজগাণিতিক রাশি।

যেমন : $a + 2b - 3c$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

❖ বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত $a, b, c, p, q, r, xy, z, \ldots \ldots \ldots$ ইত্যাদি বর্ণমালাগুলো অক্ষর প্রতীক। অক্ষর প্রতীকগুলোকে চলক বলা হয় এবং এদের মান পরিবর্তনশীল।

❖ ধ্রুবক হলো বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত সংখ্যা যার মান নির্দিষ্ট।

বর্গ সংবলিত সূত্রাবলি

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ এবং $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$
- $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
- $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

- $(x+a)(x+b) = ax^2 + (a+b)x + ab$
- $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$
- $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$
- $(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)$
- $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$
- $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

অনুঃ 3.1

Type – 1
বর্গ সংক্রান্ত

Model Example-1: $ax - by - cz$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

Solve: $ax - by - cz$ রাশিটির বর্গ $= (ax - by - cz)^2$

$$= \{(ax) - (by) - (cz)\}^2$$

$$= (ax)^2 + (-by)^2 + (-cz)^2 + 2(ax)(-by) + 2(-by)(-cz) + 2(-cz)(ax)\}$$

$$= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2abxy + 2bcyz - 2caxz$$

Now Practice

1. $3p + 4q - 5r$

2. $\frac{a}{2} + \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$

3. $x^2 + \frac{2}{Y^2}$

4. $a + \frac{1}{a}$

Type – 2
সরল কর

Model Example: $(2m+3n-p)^2+(2m-3n+p)^2-2(2m+3n-p)(2m-3n+p)$

মনেকরি,

$$2m+3n-p=a$$
$$2m-3n+p=b$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=a^2+b^2-2ab$

$=(a-b)^2$

$=\{2m+3n-p-2m+3n-p\}^2$

$=(6n-2p)^2$

$=(6n)^2-2.6n.2p+(2p)^2$

$=36n^2-24np+4p^2$ **Ans**

Now Practice

1. $(4x+7y-3z)^2+2(4x+7y-3z)(7y-4x+3z)+(7y-4x+3z)^2$ **Ans:** $196y^2$

2. $(2a+7)^2+2(2a+7)(2a-7)+(2a-7)^2$ **Ans:** $16a^3$

Type – 3
মান নির্ণয়

Model Example-1: $X = 1 + \frac{6}{x}$ হলে $\frac{6}{x^2+x+1}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solve: দেওয়া আছে,

$$X = 1 + \frac{6}{x}$$
$$\Rightarrow X - \frac{6}{x} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x^2-6}{x} = 1$$
$$\Rightarrow x^2 - 6 = x$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$$
$$\Rightarrow x(x-3) + 2(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow (x-3)(x+2) = 0$$

হয়,

$x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = 3$

অথবা,

$x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = -2$

এখন, $x = 3$ হলে, $\frac{6}{x^2+x+1} = \frac{6}{3^2+3+1} = \frac{6}{13}$

$x = -2$ হলে, $\frac{6}{x^2+x+1} = \frac{6}{(-2^2)+(-2)+1} = 2$

Ans: $\frac{6}{13}, 2$

Model Example-2: $a^2 = 2a - 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$

Solve: দেওয়া আছে,

$$a^2 = 2a - 1$$

$$\Rightarrow a^2 + 1 = 2a$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+1}{a} = 2$$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{a} = 2$$

$$\text{L.H.S} = a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2.a.\frac{1}{a}$$

$$= (2)^2 - 2$$

$$= 2$$

$$\text{R.H.S} = a^4 + \frac{1}{a^4} = (a^2)^2 + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2$$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2.a^2.\frac{1}{a^2}$$

$$= \{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2.a^2.\frac{1}{a^2}\}^2 - 2$$

$$= \{(2)^2 - 2\}^2 - 2$$

$$= (4-2)^2 - 2$$

$$= 2$$

$\therefore$ L.H.S=R.H.S **(Proved)**

Model Example-3: $\mathbf{x} = 7 - 4\sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solve: দেওয়া আছে, $\mathbf{x} = 7 - 4\sqrt{3}$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{7-4\sqrt{3}} = \frac{(7+4\sqrt{3})}{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}$$

$$= \frac{7+4\sqrt{3}}{(7)^2-(4\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{7+4\sqrt{3}}{49-48}$$

$$= 7 + 4\sqrt{3}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 7 - 4\sqrt{3} + 7 + 4\sqrt{3} = 14$$

এখন, $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 - 2.\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

$$= x - 2 + \frac{1}{x}$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2$$

$$= 14 - 2 \qquad [x + \frac{1}{x} = 14]$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 12$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$$

$\Rightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{3}$ [ধনাত্বক মান নিয়ে কারণ $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ এর মান ঋণাত্বক হবে]

Note/ব্যাখ্যাঃ

এখানে, $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ এর মান $-2\sqrt{3}$ হবে কারণ,

$$\mathbf{x} = 7 - 4\sqrt{3} = 0.0718$$

$$\frac{1}{x} = 7 + 4\sqrt{3} = 13.9282$$

$$\therefore \sqrt{x} = 0.2680$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}} = 3.7321$$

$$\therefore \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.2680 - 3.7321 = -3.4641$$

তাই $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ এর মান ঋণাত্বক হবে।

Model Example-4: $a + b = \sqrt{3}$, $a - b = \sqrt{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $8ab(a^2 + b^2) = 5$

Solve: L.H.S $= 8ab(a^2 + b^2)$

$$= 4ab.2(a^2 + b^2)$$

$$= \{(a+b)^2 - (a-b)^2\}.\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$$

$$= \left\{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2\right\}.\left\{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2\right\}$$

$$= (3-2)(3+2)$$

$$= 5$$

= R. H .S

∴ L.H.S=R.H.S **(Proved)**

Model Example-5: $x = 5 - \frac{1}{x}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^4 = 527 - \frac{1}{x^4}$

Solve: দেওয়া আছে,

$$x = 5 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 5$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (5)^2$$ [বর্গ করে]

$$\Rightarrow x^2 + 2.x.\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$$

$$\Rightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = (23)^2$$

$$\Rightarrow x^4 + 2.x^2.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 529$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 527$$

$$\Rightarrow x^4 = 527 - \frac{1}{x^4}$$ **(Proved)**

Now Practice:

1. যদি $x = 3 + \frac{1}{x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^4 = 119 - \frac{1}{x^4}$

2. $p^2 + 1 = \sqrt{5}p$ হলে প্রমাণ কর যে, $p^4 = 7 - \frac{1}{p^4}$

3. $x^4 = 322 - \frac{1}{x^4}$ হলে দেখাও যে, $x = 4 + \frac{1}{x}$

4. $x + \frac{1}{x} = 5$ হলে $\frac{2x}{3x^2 - 5x + 3}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans:** $\frac{1}{5}$

5. $x = \sqrt{5} - \sqrt{4}$ হলে $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans:** 322

6. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$ হলে প্রমাণ কর যে, $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

7. $x + y = \sqrt{5}$, $x - y = \sqrt{3}$ হলে $xy(x^2 + y^2)$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans:** 2

8. $x = \sqrt{\frac{5x}{2} + \frac{1}{6}}$ হলে $\frac{36x^4 + 1}{9x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans:** $\frac{79}{3}$

Type – 4
দুটি বর্গের বিয়োগফল রূপে প্রকাশ

Model Example: $(2x + 3y)(4x - 5y)$ কে দুটি বর্গের অন্তরফল রূপে প্রকাশ।

Solve: ধরি,

$$2x + 3y = a$$
$$4x - 5y = b$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= ab$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{2x+3y+4x-5y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x+3y-4x+5y}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{6x-2y}{2}\right)^2 - \left(\frac{-2x+8y}{2}\right)^2$$
$$= \{\frac{2(3x-y)}{2}\}^2 - \{\frac{2(4y-x)}{2}\}^2$$
$$= (3x - y)^2 - (4y - x)^2$$

Ans:

Now Practice

1. $(3a + 4b)(5a + 2c)$ কে দুটি বর্গের অন্তরফল রূপে প্রকাশ।

Ans: $(4a + 2b + c)^2 - (2b - a - c)^2$

অনুঃ 3.2

ঘন সংবলিত সূত্রাবলি

1.$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

2.$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^3 - b^3$

$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

3. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

4.$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$= (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

5.$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Type – 1
ঘন নির্ণয় কর

Model Example-1: $(a-b+c)$ এর ঘন নির্ণয় কর?

Solve: $(a-b+c)$ এর ঘন $= (a-b+c)^3$

$= \{(a-b)+c\}^3$

$= (a-b)^3 + 3(a-b)^2.c + 3(a-b).c^2 + c^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3c(a^2 - 2ab + b^2) + 3ac^2 - 3bc^2 + c^3$

$= a^3 - b^3 + c^3 - 3a^2b + 3ab^2 + 3ca^2 + 3b^2c + 3c^2a - 3bc^2 - 6abc$ **Ans:**

Now Practice

1.$(2x+3y)$ এর ঘন নির্ণয় কর?

2.$(2x-y)$ এর ঘন নির্ণয় কর?

3.$(2a-b-3c)$ এর ঘন নির্ণয় কর?

Type – 2
সরল কর

Model Example-: $(a+b+c)^3-(a-b-c)^3-6(b+c)\{a^2-(b+c)^2\}$

Solve: $=(a+b+c)^3-(a-b-c)^3-3.2(b+c)(a+b+c)(a-b-c)$

ধরি,

$a+b+c=m$

$a-b-c=n$

(-) (+) (+) (-)

বিয়োগ করে, $2b+2c=m-n$

$\Rightarrow 2(b+c)=m-n$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=m^3-n^3-3(m-n).m.n$

$=m^3-n^3-3.m.n(m-n)$

$=(m-n)^3$

$=\{2(b+c)\}^3$

$=8(b+c)^3$ **Ans:**

Now Practice

1. $(7x+3b)^3-(5x+3b)^3-6x(7x+3b)(5x+3b)$ **Ans:** $8x^3$

2. $(m+n)^6-(m-n)^6-12mn(m^2-n^2)$ **Ans:** $64m^3n^3$

Type – 3
মান নির্ণয়

Model Example-1: যদি $a + b = m$, $a^2 + b^2 = n$ এবং $a^3 + b^3 = p^3$ হয় তবে দেখাও যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$

Solve: দেওয়া আছে, $a + b = m, a^2 + b^2 = n, a^3 + b^3 = p^3$

L.H.S $= m^3 + 2p^3$

$= (a + b)^3 + 2(a^3 + b^3)$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 2a^3 + 2b^3$

$= 3a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^3$

$= 3a^2(a + b) + 3b^2(a + b)$

$= (a + b)(3a^2 + 3b^2)$

$= 3(a + b)(a^2 + b^2)$

$= 3mn$

= R.H.S

∴ L.H.S=R.H.S **(Proved)**

Model Example-2: যদি $\left(2y + \frac{2}{y}\right)^2 = 12$ হয় প্রমাণ কর যে, $y^3 + \frac{1}{Y^3} = 0$

Solve: দেওয়া আছে, $\left(2y + \frac{2}{y}\right)^2 = 12$

$\Rightarrow 2y + \frac{2}{y} = \sqrt{12}$

$\Rightarrow 2(y + \frac{1}{y}) = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow y + \frac{1}{y} = \sqrt{3}$

রাফ

$= \sqrt{12}$

$= \sqrt{4 \times 3}$

$= \sqrt{4}.\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}$

L.H.S $= y^3 + \frac{1}{Y^3}$

$= (y + \frac{1}{y})^3 - 3.y.\frac{1}{y}(y + \frac{1}{y})$

$= (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

= R.H.S

∴ L.H.S=R.H.S **(Proved)**

Model Example-3: $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18\sqrt{3}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Solve: দেওয়া আছে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{x^6+1}{x^3} = 18\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x^6 + 1 = 18\sqrt{3}x^3$$

$$\Rightarrow x^6 - 18\sqrt{3}x^3 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x^3)^2 - 2.x^3.9\sqrt{3} + (9\sqrt{3})^2 - (9\sqrt{3})^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x^3 - 9\sqrt{3})^2 = 242$$

$$\Rightarrow x^3 - 9\sqrt{3} = \sqrt{242}$$

$$\Rightarrow x^3 - 9\sqrt{3} = 11\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^3 = 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^3 = 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^3 = (\sqrt{3})^3 + 3.(\sqrt{3})^2.\sqrt{2} + 3.(\sqrt{3})^2.\sqrt{2} + (\sqrt{2})^3$$

$$\Rightarrow x^3 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^3$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$ **(Proved)**

Model Example-4: $x = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ হলে, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solve: দেওয়া আছে, $x = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

$$= \sqrt{3 + 2\sqrt{6} + 2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}.\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$$

$$x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= x^3 + \frac{1}{x^3}$

$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$= (\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2})^3 - 3\,(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2})$

$= (2\sqrt{3})^3 - 3.2\sqrt{3}$

$= 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

$= 18\sqrt{3}$

Now Practice

1. $x+y = a,\ x^2 + y^2 = b^2,\ x^3 + y^3 = c^3$ হয় তবে দেখাও যে, $a^3 + 2c^3 = 3ab^2$

2. $p = \sqrt{6} - \sqrt{5}$ হলে, $p^3 + \frac{1}{p^3}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans:** $42\sqrt{6}$

3. $3p - \frac{3}{p} = 2$ হলে প্রমাণ কর যে, $27(p^3 - \frac{1}{p^3}) = 62$

4. $a^2 = \sqrt{3}a - 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $a^3 - \frac{1}{a^3} = 0$

Type – 4
উচ্চতর দক্ষতা মূলক

Model Example-1: $x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^3 - \frac{1}{x^3} = 36$

Solve: দেওয়া আছে, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$

$$\Rightarrow (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = 119$$

$$\Rightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2.x^2.\frac{1}{x^2} = 119$$

$$\Rightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = 121$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2.x.\frac{1}{x} = 11$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm 3$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = 3 \quad \text{[ধণাত্বক মান নিয়ে]}$$

L.H.S $= x^3 - \frac{1}{x^3}$

$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3.x.\frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$= (3)^3 + 3.3$

$= 27 + 9$

$= 36$

$=$ R.H.S

$\therefore$ L.H.S=R.H.S **(Proved)**

Model Example-2: $x+\frac{1}{x}=3$ হলে $x^5+\frac{1}{x^5}=36$ এর মান নির্ণয় কর।

Solve: দেওয়া আছে, $x+\frac{1}{x}=3$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(3)^2$$

$$\Rightarrow x^2+2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=9$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

আবার, $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$$=(3)^2+3.3$$

$$=18$$

এখন, $(x^2+\frac{1}{x^2})(x^3+\frac{1}{x^3})=7\times 18$

$$\Rightarrow x^5+\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x^5}=126$$

$$\Rightarrow \left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=126$$

$$\Rightarrow \left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+3=126$$

$$\Rightarrow \left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)=123$$ **Ans**

Model Example-3: $a+\frac{1}{a}=2$ হলে প্রমাণ কর যে, $a^6+\frac{1}{a^6}=a^{10}+\frac{1}{a^{10}}$

Solve: দেওয়া আছে, $a+\frac{1}{a}=2$

$$\Rightarrow \frac{a^2+1}{a}=2$$

$$\Rightarrow a^2-2a+1=0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2=0$$

$$\Rightarrow a=1$$

$\text{L.H.S}=a^6+\frac{1}{a^6}=(1)^6+\frac{1}{(1)^6}=2$

$\text{R.H.S}=a^{10}+\frac{1}{a^{10}}=(1)^{10}+\frac{1}{(1)^{10}}=2$

∴ L.H.S=R.H.S **(Proved)**

Now Practice

1. $x^2-\sqrt{5}a+1=0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^5-\frac{1}{5}=5\sqrt{5}$
2. $a=3+2\sqrt{2}$ হলে, $(a^3+\frac{1}{a^3})\ (a^2+\frac{1}{a^2})$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans:** 6732
3. $x+\frac{1}{x}=3$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^7+\frac{1}{x^7}=843$
4. $m=3+2\sqrt{2}$ হলে, $(\sqrt{m})^3+\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans:** $10\sqrt{2}$

অনুঃ 3.3

উৎপাদকে বিশ্লেষণ

- দুই বা ততোধিক রাশির গুনফল কোনো রাশির সমান হলে, প্রথমোক্ত রাশিগুলো হলো শেষোক্ত রাশিটির উৎপাদক বা গুননীয়ক ।

- উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ হলো বীজগানিতিক রাশির উৎপাদকগুলোর গুনফলরূপে প্রকাশ।

উৎপাদকে উদাহরণ - $12 = 2 \times 2 \times 3$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ পদ্ধতি

সাধারণ উৎপাদক : কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদে কোনো সাধারণ উৎপাদক থাকলে তা বের করে নিতে হবে, $15 + 12 = 3(5+4)$

$$3a^2b + 6ab^2 + 12a^2b^2 = 3ab(a + 2b + 4ab)$$

পূর্ণবর্গ : একটি রাশিকে পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

$$4x^2 + 12x + 9 = 2x^2 + 2.3x.3 + 3^2 = (2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3)$$

দুইটি বর্গের অন্তর একটি রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা এবং $a^2 - b^2 = (\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{b})$ সূত্রে প্রয়োগ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়। $a^4 + 4a^2 + 16 = (a^2)^2 + 4^2 + 4a^2 = (a^2+4)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 4 + 2a)(a^2 + 4 - 2a)$

সরল মধ্যপদ বিশ্লেষণ : $x^2 + px + q$ আকারের বহুপদীর উৎপাদক নির্ণায়ের জন্য এর দুটি সচিহ্ন উৎপাদক নিতে হয় যাদের বীজগাণিতিক সমষ্টি $= x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x-3) - 2(x-3) = (x-3)(x-2)$

হয়, $x^2 - 5x + 6$
$-3 - 2 = 6 - q$
$-3 - 2 - 5 -= p$

যৌগিক মধ্যপদ বিশ্লেষণ : $ax^2 + bx + c$ আকারের বহুপদীকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে ac অর্থাৎ x^2 এর সহগ এবং x বর্জিত পদের গুণফলকে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে যাদের যাদের বীজগাণিতিক সমষ্টি x এর সহগ bএর সমান হয়। যেমন- $2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 3x - 2x + 3 = x(2x-3) - 1(2x-3)$

এখানে, $a = 2, c = 1$
$b = -5, -3 \times -2 = 6 = ac$
$-3 - 2 = -5 = b$

ঘন আকারে প্রকাশ : একটি রাশিকে পূর্ণঘন আকারে প্রকাশ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়,

যেমন : $8x^3 + 24x^2 + 24x + 8$

$= (2x)^3 + 3(2x)^2.2 + 3.2x.2^2 + 2^3$

$= (2x+2)^3 = \{2(x+1)\}^3$

$= 8(x+1)^3$

$= 8(x+1)(x+1)(x+1)$

দুইটি ঘন এর যোগফল বা বিয়োগফল সূত্র দিয়ে :

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ এবং $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

সূত্র দুইটি ব্যবহার করে উৎপাদক নির্ণয় করা যায় ।

যেমন- $a^6 - 64$

$= (a^2)^3 - 4^3$

$= (a^2 - 4)(a^4 + 4a^2 + 16)$

$= (a+2)(a-2)(a^2 + 2a + 4)(a^2 + 2a + 4)$

Type - 3

Model Example-1:

❑ $x^4 - \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)x^2 + 1$

$= x^4 - a^2x^2 - \frac{x^2}{a^2} + 1$

$= x^2\,(x^2 - a^2) - -\frac{1}{a^2}(x^2 - a^2)$

$= x^2\,(x + a)(x - a) - \frac{1}{a^2}(\mathrm{x} + \mathrm{a})(\mathrm{x} - \mathrm{a})$

$= (\mathrm{x} + \mathrm{a})(\mathrm{x} - \mathrm{a})\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Model Example-2:

❑ $3\sqrt{3}a^3 + 64$

$= \left(\sqrt{3}a\right)^3 + (4)^3$

$= \left(\sqrt{3}a + 4\right)\left\{\left(\sqrt{3}a\right)^2 + \sqrt{3}a.4 + (4)^2\right\}$

$= \left(\sqrt{3}a + 4\right)(3a^2 + 4\sqrt{3}a + 16)$

Model Example-3:

❑ $4abxy - (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$

$= 2abxy + 2abxy - (a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2\,y^2)$

$= 2abxy + 2abxy - a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 - b^2\,y^2$

$= (b^2x^2 2abxy + a^2y^2) - (a^2x^2 - 2abxy + b^2\,y^2)$

$= (bx + ay)^2 - (ax - by)^2$

$= (bx + ay + ax - by)(bx + ay - ax + by)$

Model Example-4:

❑ $\boldsymbol{(p^2-1)(q^2-1)+4pq}$

$= p^2q^2 - p^2 - q^2 + 12\text{pq} + 2\text{pq}$

$= (p^2q^2 + 2pq + 1) - (p^2q^2 + 2pq + q)$

$= (pq+1)^2 - (p+q)^2$

$= (pq+1+p+q)(pq+1-p-q)$

Model Example-5:

❑ $\boldsymbol{p^2+p-(a-1)(a-2)}$

$= p^2 + p - (a-1)(a-1-1)$

$= p^2 + p - x(x-1)$

$= p^2 + p - x^2 + x$

$= p^2 - x^2 + 1(p+x)$

$= (p+x)(p-x) + 1(p+x)$

$= (p+x)(p-x+1)$

$= (p+a-1)(p-a-1-1)$

$= (p+a-1)(p-a-2)$

Now Practice

1. $p^3 - 9q^3 + (p+q)^3$

Ans $(p-q)(2p^2 + 5pq + 8q^2)$

2. $x^2 - \frac{8}{3}xy - y^2$

Ans $(x-3y)(x+\frac{y}{3})$

3. $x^2 - 2px - \frac{2}{p}x + 4$

Ans $(x-2p)(x-\frac{2}{y})$

4. $a^4 - 27a^4 + 1$

Ans $(a^2 + 5a - 1)(a^2 - 5a - 1)$

4. $(a+b)^6 - (a-b)^6 - 12ab(a^2 - b^2)^2$

Ans $64a^3b^3$

অনুঃ 3.4

ভাগশেষ উপপাদ্য

- $f(x) = (x-a).h(x) + r\,; a$ এর সকল মানের জন্য সত্য যেখানে, ভাজ্য $f(x)$, ভাগফল $h(x)$, ভাগশেষ r ও ভাজক $(x-a)$
- $(x-a)$, $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবংকেবল যদি $f(x) = 0$ হয় ।
- $f(x)$ কে $(x-y)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি ভাগশেষ শূণ্য হয়, তবে $(x-y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
- ভাগশেষ উপপাদ্য : ধনাত্মক মাত্রার কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $(x-a)$দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$ ।

প্রতিজ্ঞা : যদি $f(x)$ এর মাত্রা ধনাত্মক হয় এবং $a \neq 0$ হয় তবে $f(x)$ কে $(ax+b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয়

উদাহরণ :

বহুপদী- $f(x) = x^3 - x - 6$ ভাজক $(x-2)$ ভাগফল $f(2)$

উৎপাদক উপপাদ্য- কোনো বহুপদী $f(x)$, $(x-a)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি হয় $f(a) = 0$।

অনুসিদ্ধান্ত : $ax+b, a \neq 0$ হলে , রাশিটি কোনো বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদ হবে যদি $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ এবং কেবল যদি হয়। বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র গঠন ও প্রয়োগ।

Type-1
ভাগশেষ উপপাদ্য

Model Example-1: $a^3 - a^2 - 10a - 8$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষন কর।

মনেকরি, f(a)= $a^3 - a^2 - 10a - 8$

$\therefore f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$

$= -1 - 1 + 10 - 8$

$= 0$

$\therefore (a+1), f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 - a^2 - 10a - 8$

$= a^3 - a^2 - 2a - 8a - 8$

$= a^2(a+1) - 2a(a+1) - 8(a+1)$

$= (a+1) - (a^2 - 2a - 8)$

$= (a+1) - (a^2 - 4a + 2a - 8)$

$= (a+1) - \{a(a-4) + 2(a-4)\}$

$= (a+1)(a+2)(a-4)$ **Ans**

Model Example-2: $x^3 + 6x^2y + 11xy + 6y^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষন কর।

Solve: ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগের উদ্দেশ্যে এখানে x কে চলক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করি।

মনেকরি, f(x)= $x^3 + 6x^2y + 11xy + 6y^3$

তাহলে,f(-3y) = $(-3y)^3 + 6(-3y)^2 . y + 11(-3y)y + 6y^3$

$= -27y^3 + 54y^3 - 33y^3 + 6y^3$

$= 0$

$\therefore (x+3y), f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 6x^2y + 11xy + 6y^3$

$= x^3 + 3x^2y + 3x^2y + 9xy^2 + 2xy^2 + 6y^3$

$= x^2(x + 3y) + 3xy(x + 3y) + 2y^2(x + 3y)$

$= (x + 3y)(x^2 + 3xy + 2y^2)$

$= (x + 3y)(x^2 + 2xy + xy + 2y^2)$

$= (x + 3y)\{x(x + 2y) + y(x + 2y)\}$

$= (x + 3y)(x + y)(x + 2y)$ **Ans**

Now Practice

1. $18x^3 + 15x^2 - x - 2$ **Ans:** $(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$

2. $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$ **Ans:** $(a + 1)^2(x + 2)(x + 3)$

অনুঃ 3.5

❑ মনে রাখার সহজ কৌশল :

Quantity – পরিমাণ (q)

Work – কাজ (w)

Number – বছর / সংখ্যা (n)

Distance – দূরত্ব (d)

Interest – বছর / সংখ্যা (I)

Principal – মূলধন (P)

Rate of Interest – মুনাফার হার (r)

Sale price – বিক্রয়মূল্য (S)

Cost price – ক্রয়মূল্য(C)

Compound profit–চক্রবৃদ্ধি মুনাফা(C)

❑ বাস্তব সমস্যা সমাধানে বিভিন্ন সূত্র নিচে উল্লেখ করা হলো :

(১) দেয় বা প্রাপ্য বিষয়ক	$q =$ জনপ্রতি টাকার পরিমাণ $n =$ লোকের সংখ্যা	দেয় বা প্রাপ্য, $A = qn$ টাকা
(২) সময় ও কাজ বিষয়ক	$q =$ প্রত্যেক একক সময়ে কাজের যে অংশ সম্পন্ন করে $n =$ কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা $x =$ কাজে মোট সময়। $w = n$ জনে x সময়ে কাজের যে অংশ সম্পন্ন করে।	কাজের পরিমাণ, $w = \text{qnx}$
(৩) সময় ও দূরত্ব বিষয়ক	$v =$ প্রতি ঘণ্টায় মোট গতিবেগ $t =$ মোট সময়। $d =$ মোট দূরত্ব ।	নির্দিষ্ট সময়ে দূরত্ব, $d = vt$
(৪) নল ও চৌবাচ্চা বিষয়ক	$\text{Q}_0 =$ নলের মুখ খুলে দেওয়ার সময় চৌবাচ্চায় জমা পানির পরিমাণ $q =$ প্রত্যেক একক নল দিয়ে যে পানি প্রবেশ করে অথবা বের হয়। $t =$ অতিক্রান্ত সময়। $\text{Q}(t) = t$ সময়ে চৌবাচ্চায় পানির পরিমাণ (পানি প্রবেশ হওয়ার শর্তে "$+$" চিহ্ন এবং পানি বের হওয়ার বের হওয়ার শর্ত" $-$ " চিহ্ন ব্যবহার করতে হবে)।	নির্দিষ্ট সময়ে চৌবাচ্চায় পানির পরিমাণ , $Q(t) = Q_0 \pm qt$

(৫) শতকরা অংশ বিষয়ক	$b =$ মোট রাশি $r =$ শতকরা ভগ্নাংশ $= \frac{s}{100} = s\%$ $p =$ শতকরা অংশ$= b$ এর $s\%$	শতকরা অংশ, $p = br$
(৬) লাভ ও ক্ষতি বিষয়ক	$b =$ বিক্রয়মূল্য , $\mathrm{C} =$ ক্রয়মূল্য $\mathrm{I} =$ লাভ বা মুনাফা $r =$ লাভ বা ক্ষতির হার	$\mathrm{S} = \mathrm{C(I \pm r)}$ লাভের ক্ষেত্রে, $\mathrm{S} = \mathrm{C(I + r)}$ ক্ষতির ক্ষেত্রে, $\mathrm{S} = \mathrm{C(I - r)}$
(৭) বিনিয়োগ-মুনাফা বিষয়ক	$\mathrm{I} = \mathrm{n}$ সময় পর মুনাফা $\mathrm{n} =$নির্দিষ্ট সময় $\mathrm{P} =$ মূলধন $r =$ একক সময়ে একক মূলধনের মুনাফা $\mathrm{A} = n$ সময় পরে মুনাফাসহ মূলধন	সরল মুনাফার ক্ষেত্রে, $\mathrm{I} = \mathrm{Prn}$ $\mathrm{A} = P + I = P + Pnr$ $= P(1 + nr)$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে, $\mathrm{A} = \mathrm{P}(1 + r)^n$

Type-1

Model Example-1: বার্ষিক ক্রীড়া অনুষ্ঠান করার জন্য কোনো এক সমিতির সদস্যরা 45000 টাকার বাজেট করলেন এবং সিদ্ধান্ত নিলেন যে, প্রত্যেক সদস্যই সমান চাঁদা দিবেন। কিন্তু 5 সদস্য চাঁদা দিতে অসম্মতি জানালেন। এর প্রত্যেক সদস্যের মাথাপিছু 15 টাকা চাঁদা বৃদ্ধি পেল। ঐ সমিতিতে কতজন সদস্য ছিল।

Solution:

মনেকরি সমিতির সদস্য সংখ্যা x জনপ্রতি চাঁদার পরিমাণ q টাকা। তাহলে মোট চাঁদা $A = qx = 45000$ টাকা

প্রকৃতপক্ষে চাঁদা প্রদানকারী সদস্য সংখ্যা ছিল $(x-5)$ জন এবং জনপ্রতি চাঁদা $(q+15)$ টাকা।
তাহলে মোট চাঁদার হলো $(x-5)(q+15)$

প্রশ্নানুসারে,

$$qx = (x-5)(q+15) \longrightarrow (1)$$
$$qx = 45000 \longrightarrow (2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই

$$qx = (x-5)(q+15)$$
$$\Rightarrow qx = qx - 5q + 15x - 75$$
$$\Rightarrow 5\text{q} = 15x - 75 = 5(3x - 15)$$
$$\therefore q = 3x - 15$$

সমীকরণ (2) এ q মান বসাই,

$$(3x-15)x = 45000$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 15x = 45000$$
$$\Rightarrow x^2 - 5x = 15000 \qquad \text{[উভয় 3 পক্ষকে গুণ করে]}$$
$$\Rightarrow x^2 - 5x - 15000 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 125x + 120x - 15000 = 0$$
$$\Rightarrow x - (\text{x} - 125) + 120(\text{x} - 125) = 0$$
$$\Rightarrow (\text{x} - 125)(\text{x} + 120) = 0$$

হয়,

$x - 125 = 0$

$\Rightarrow x = 125$

অথবা,

$x + 120 = 0$

$\Rightarrow x = -120$

যেহেতু সদস্য সংখ্যা ঋণাত্বক হতে পারে না, তাই x এর মান -120 গ্রহণযোগ্য নয়।
সুতরাং সমিতির সদস্য সংখ্যা 125.

Model Example-2: ক একটি কাজ করে p দিনে এবং খ 2p দিনে করে। তারা একটি কাজ আরম্ভ করে এবং কয়েকদিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে গেলো । বাকি কাজটুকু খ r দিনে শেষ করে। কাজটি কত দিনে শেষ হয়েছিল?

Solution:

মনেকরি সম্পূর্ণ কাজ x এবং ক ও খ একত্রে t দিনে কাজ করে।

ক p দিনে করে x কাজ

ক 1 " " $\frac{x}{p}$ কাজ

ক t " " $\frac{xt}{p}$ কাজ

আবার, খ $2p$ দিনে করে x কাজ

খ 1" " $\frac{x}{2p}$ কাজ

খ$(t+r)$" " $\frac{x(t+r)}{2p}$ কাজ

প্রশ্নানুসারে, $\frac{xt}{p} + \frac{x(t+r)}{2p} = x$

$\Rightarrow \frac{2xt+xt+xr}{2p} = x$

$\Rightarrow 3xt + xr = 2px$

$\Rightarrow 3xt + xr = 2px$

$\Rightarrow 3t = 2p - r$ [x দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow t = \frac{2p-r}{3}$

$\therefore$ সম্পূর্ণ কাজ শেষ হয় $= (t + r)$ দিনে

$= (\frac{2p-r}{3} + r)$ দিনে

$$= \frac{2r+2p}{3} \text{ দিনে}$$

$$= \frac{2}{3}(r+p) \text{ দিনে}$$

$\therefore$ কাজটি $\frac{2}{3}(r+p)$ দিনে শেষ হয়েছিল।

Model Example-3: একটি নল 12 মিনিটে একটি খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ করতে পারে। অপর একটি নল প্রতি মিনিটে 14 লিটার পানি বের করে দেয়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নল একসাথে খুলে দেওয়া হলে চৌবাচ্চাটি 96 মিনিটে পূর্ণ হয়। চৌবাচ্চাটিতে কত লিটার পানি ধরে?

Solution:

মনেকরি, প্রথম নল দ্বারা প্রতি মিনিটে x লিটার পানি প্রবেশ করে এবং চৌবাচ্চাটিতে মোট y লিটার পানি ধরে।

প্রশ্নানুসারে,

প্রথম নল দ্বারা 12 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়

$$\therefore y = 12x \rightarrow (1)$$

আবার, দুইটি নল দ্বারা 96 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়

$$\therefore y = 96x - 96 \times 14 \rightarrow (2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $x = y/12$

X এর মান সমীকরণ (2) এ বসাই,

$$\therefore y = 96 \times \frac{y}{12} - 96 \times 14$$

$$\Rightarrow y = 8y - 96 \times 14$$

$$\Rightarrow 7y = 96 \times 14$$

$$\Rightarrow y = \frac{96 \times 14}{7}$$

$$= 192$$

সুতরাং চৌবাচ্চাটিতে মোট 192 লিটার পানি ধরে।

Now Practice

1. একটি বইয়ের মূল্য 24 টাকা । এই মূল্য বই তৈরির ব্যায়ের 80% । বাকি মূল্য সরকার ভর্তুকি দিয়ে থাকেন। সরকার প্রতি বইয়ে কত টাকা ভর্তুকি দিয়ে থাকেন? **Ans:** 6 টাকা

2. টাকায় n সংখ্যক কমলা বিক্রি করায় r% ক্ষতি হয়। s% লাভ করতে হলে টাকায় কয়টি কমলা বিক্রি করতে হবে?

Ans: টাকায় $\frac{n(100-r)}{100+s}$ সংখ্যক

3. শতকরা বার্ষিক 7 টাকা হার সরল মুনাফায় 650 টাকার 6 বছরের মুনাফা কত? **Ans:** 273 টাকা

4. এক মাঝির দাঁড় বেয়ে 15 কিমি যেতে এবং সেখান থেকে ফিরে আসতে 4 ঘণ্টা সময় লাগে। সে স্রোতের অনুকূলে যতক্ষণে 5 কিমি যায়, স্রোতের প্রতিকূলে ততক্ষণে 3 কিমি যায়। দাঁড়ের বেগ ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

Ans: দাঁড়ের বেগ 8 কিমি/ঘণ্টা
স্রোতের বেগ 2 কিমি/ঘণ্টা

SOLVED CQ

১. $x^2 = 2\sqrt{15} + 8$ এবং $M = 4p^2 + \frac{1}{4p^2} + 4p - \frac{1}{p} - 2$ [যেখানে $x > 0$]

ক. দেখাও যে, $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$

খ. $x^5 + \frac{32}{x^5}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. M কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং M = 0 ধরে দেখাও যে, $2p = \frac{1}{2p}$ হলে দেখাও যে, $16p^4 + \frac{1}{16p^4} = 34$

সমাধান

ক) $x^2 = 2\sqrt{15} + 8$ বা, $x^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$

বা, $x^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$

$\therefore x = (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{3} + \sqrt{5})$ [**Showed**] [$\because x > 0$]

খ) 'ক' হতে পাই, $x = (\sqrt{5} + \sqrt{3})$ $\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}; \frac{2}{x} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

এখন, $x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 2.x.\frac{2}{x} = (2\sqrt{5})^2 - 4 = 16$

এবং $x^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{2}{x} = (2\sqrt{5})^2\left(x + \frac{2}{x}\right) = (2\sqrt{5})^3 - 6 \times 2\sqrt{5} = 28\sqrt{5}$

$\therefore \left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)^3\left(x^3 + \frac{8}{x^3}\right) = (16) \times (28\sqrt{5})$ বা, $\left(x^5 + \frac{32}{x^5}\right) + 4\left(x + \frac{2}{x}\right) = 448\sqrt{5}$

বা, $\left(x^5 + \frac{32}{x^5}\right) = 448\sqrt{5} - 4 \times 2\sqrt{5} = 440\sqrt{5}$ **(Ans.)**

গ) $M = 4p^2 + \frac{1}{4p^2} + 4p - \frac{1}{p} - 2 = \left(2p - \frac{1}{2p}\right)^2 + 2\left(2p - \frac{1}{2p}\right)$

$= \left(2p - \frac{1}{2p}\right)\left(2p - \frac{1}{2p} + 2\right)$; যা M এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ।

এখন, $M = 0$ হলে, $\left(2p - \frac{1}{2p}\right) = 0$ অথবা, $\left(2p - \frac{1}{2p} + 2\right) = 0$ বা, $2p = \frac{1}{2p}$ **(Showed)**

এখন, $2p \neq \frac{1}{2p}$ হলে অর্থাৎ, $\left(2p - \frac{1}{2p}\right) \neq 0$ হলে অবশ্যই $\left(2p - \frac{1}{2p} + 2 = 0\right)$ হবে,
অর্থাৎ $2p - \frac{1}{2p} = -2$ হবে।

$\therefore 16p^4 + \frac{1}{16p^4} = \left(4p^2 + \frac{1}{4p^2}\right)^2 - 2.4p^2 = \left\{\left(2p - \frac{1}{2p}\right)^2 + 2.2p.\frac{1}{2p}\right\}^2 - 2$

$= \{(-2)^2 + 2\}^2 - 2 = 6^2 - 2 = 34$ **(Showed)**

২. $x = 3\sqrt{2} + 17$ এবং $a + \frac{1}{a+2} = -4$.

ক. $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

খ. $(a+2)^5 - \frac{1}{(a+2)^5}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\frac{13\sqrt{2}x}{x^2 - 5\sqrt{2}x + 1} = 13.$

সমাধান

ক) ধরি, $f(x) = x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

$\therefore f(-y) = (-y)^3 - 7(-y)y^2 - 6y^3 = -y^3 + 7y^3 - 6y^3 = 0$

$\therefore x - (-y) = (x + y);$ $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^3 - 7xy^2 - 6y^3 = x^3 + x^2y - x^2y - x^2y - xy^2 - 6xy^2 - 6y^3$

$= x^2\,(x + y) - xy(x + y) - 6y^2(x + y = (x + y)(x^2 - xy - 6y^3)$

$= (x + y)(x^2 - 3xy + 2xy - 6y^2) = (x + y)(x - 3y)(x + 2y)$

খ) $a + \frac{1}{a+2} = -4$ বা, $(a + 2) + \frac{1}{(a+2)} = -4 + 2$ [উভয়পক্ষে -2 যোগ করে]

বা, $(a + 2)^2 + 1 = -2(a + 2)$ বা, $(a + 2)^2 + 2.(a + 2).1 + 1^2 = 0$

$\{(a + 2) + 1\}^2 = 0 \therefore (a + 2) = -1$

এখন, $(a + 2)^2 - \frac{1}{(a+2)^2} = (-1)^5 - \frac{1}{(-1)^5} = (-1) + (1) = 0$ **(Ans.)**

গ) $x = 3\sqrt{2} + \sqrt{17} \quad \therefore x^2 = (3\sqrt{2})^2 + 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{17} + (\sqrt{17})^2 = 35 + 6\sqrt{34}$

$\therefore x^2 = (3\sqrt{2})^2 + 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{17} + (\sqrt{17})^2$

$= 35 + 6\sqrt{34}$

সুতরাং, $\frac{13\sqrt{2}x}{x^2-5\sqrt{2}x+1} = \frac{13\sqrt{2}x(3\sqrt{2}+\sqrt{17})}{35+6\sqrt{34}-5\sqrt{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{17})+1}$

$= \frac{78+13\sqrt{34}}{6+\sqrt{34}} = \frac{13(6+\sqrt{34})}{(6+\sqrt{34})} = 13$ **(Showed)**

৩. (i)$x + y + z = 0$ (ii)$3p - \frac{3}{p} + 1 = 0$

ক. $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

খ. দেখাও যে, $\frac{(y+z)^2}{3yz} + \frac{(z+x)^2}{3zx} + \frac{(x+y)^2}{3xy} = 1.$

গ. $p^3 - \frac{1}{p^3} + 3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান

ক) প্রদত্ত রাশি $= x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$= (x^2)^2 - 2x^2y^2 + (y^2)^2 - 4x^2y^2$

$= (x^2 - y^2)^2 - (2xy)^2$

$= (x^2 - y^2 + 2xy)(x^2 - y^2 - 2xy)$

$= (x^2 + 2xy - y^2)(x^2 - 2xy - y^2)$

নির্ণেয় উৎপাদকে বিশ্লেষণ : $(x^2 + 2xy - y^2)(x^2 - 2xy - y^2)$

খ) $\frac{(y+z)^2}{3yz}+\frac{(z+x)^2}{3zx}+\frac{(x+y)^2}{3xy}=\frac{(-x)^2}{3yz}+\frac{(-y)^2}{3zx}+\frac{(-z)^2}{3xy}$ $[\because x+y+z=0]$

$=\frac{x^3+y^3+z^3}{3xyz}=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz+3xyz}{3xyz}$

$=\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^3-xy-yz-zx)+3xyz}{3xyz}=\frac{0+3xyz}{3xyz}=1$ **[Showed]**

গ) দেওয়া আছে, $3p-\frac{3}{p}+1=0$

বা, $3p-\frac{3}{p}=-1$

বা, $p-\frac{1}{p}=-\frac{1}{3}$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

এখন, $p^3-\frac{1}{p^3}+3=\left(p-\frac{1}{p}\right)^3+3.p.\frac{1}{p}\left(p-\frac{1}{p}\right)+3$

$=\left(-\frac{1}{3}\right)^3+3\left(-\frac{1}{3}\right)+3=-\frac{1}{27}-1+3=2-\frac{1}{27}=\frac{54-1}{27}=\frac{53}{27}$ **(Ans.)**

৪ . শরিয়তপুরের জনগণ একটি স্কুল করার জন্য 54,000 টাকার বাজেট করল। গ্রামের সকলেই সমপরিমাণ টাকা দিতে সম্মত হল। কিন্তু 50 জন লোক গ্রাম ত্যাগ করায় প্রত্যেককে মাথাপিছু 12 টাকা বেশি দিতে হল।

ক. যদি গ্রামের মোট জনগণ p এবং মাথাপিছু টাকার পরিমাণ q হয় তবে p ও q এর মধ্যে সম্পর্ক দেখাও।

খ. গ্রামের মোট জনগণ কত ছিল?

গ. যদি মোট টাকার $\frac{1}{5}$ অংশ 10% হারে 1 বছরের জন্য চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় এবং অবশিষ্ট টাকা 20% হারে 3 বছর এর জন্য সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করা হয় তবে ,মোট মুনাফা নির্ণয় কর।

সমাধান

ক) $\frac{54000}{p}=q$ বা, $pq=54000$

খ) $\frac{54000}{p-50}-\frac{54000}{p}=12 \Rightarrow \frac{54000p-54000(p-50)}{p(p-50)}=12 \Rightarrow \frac{2700000}{p^2-50p}=12$

$\Rightarrow 2700000=12p^2-600p \Rightarrow 12p^2-600p-2700000=0$

$\Rightarrow p^2-500p-225000=0 \Rightarrow p^2-500p+450p-225000=0=0$

$\Rightarrow p(p-500)+450(p-500)=0 \Rightarrow (p-500)(p+450)=0$

$\Rightarrow p=500$ অথবা , $p=-450$ (ইহা গ্রহণযোগ্য নয়) $\therefore$ মোট জনসংখ্যা 500 জন

গ) $p=54000\times\frac{1}{5}=10800$

$n=1$ বছর, $r=10\%=0.1$

$\therefore c=p(1+r)^n$

$=10800(1+0.1)=11880$ টাকা

$\therefore$ মুনাফা $=11880-10800=1080$ টাকা

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে, $p=43200, n=3, r=20\%=0.2$

$I=pnr=43200\times3\times0.2=25920$ টাকা

মোট মুনাফা $=1080+25920=27000$ টাকা

৫. একজন মাঝি স্রোতের অনুকূলে t_1 ঘন্টায় s কি.মি. পথ যায়। প্রতিকূলে পথ যেতে t_2 ঘণ্টা সময় লাগে।

ক. উপরের তথ্য থেকে দুটি বীজগাণিতিক সমীকরণ বের কর।

খ. নৌকার বেগ এবং স্রোতের বেগ কত?

গ. যদি মাঝি স্রোতের অনুকূলে 5 ঘণ্টায় 15 কি.মি. যায় এবং প্রতিকূলে 8 ঘণ্টায় ফিরে আসে সেক্ষেত্রে স্রোতের ও নৌকার বেগ কত?

সমাধান

ক) ধরি, নৌকার বেগ a কি.মি.

স্রোতের বেগ b কি.মি.

স্রোতের অনুকূলে t_1 ঘণ্টায় যায় s কি.মি.

$\therefore$ 1 ঘণ্টায় যায় $\frac{s}{t_1}$ কি.মি.

$\therefore$ স্রোতের অনুকূলে যায় $a + b = \frac{s}{t_1}$ কি.মি.

$\therefore$ স্রোতের প্রতিকূলে যায় $a - b = \frac{s}{t_2}$ কি.মি. **(Ans.)**

খ) 'ক' হতে পাই,

সমীকরণদ্বয় হলো:

$a + b = \frac{s}{t_1}$ ……… (i)

$a - b = \frac{s}{t_2}$ ……… (ii)

(i) হতে (ii) যোগ করে পাই,

$$a + b = \frac{s}{t_1}$$

$$a - b = \frac{s}{t_2}$$

$$2a = \frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}$$ **(Showed)**

বা, $2a = \frac{st_1+st_2}{t_1t_2}$

বা, $a = \frac{st_1+st_2}{2t_1t_2} = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$ **(Ans.)**

$\therefore$ নৌকার বেগ , $a = \frac{st_1+st_2}{2t_1t_2}$

(i) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$2b = \frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_2}$

বা, $b = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$ **(Ans.)**

গ) যদি মাঝি স্রোতের অনুকূলে যায়,

5 ঘণ্টায় অতিক্রম করে 15 কি.মি.

$\therefore$ 1 ঘণ্টায় অতিক্রম করে $\frac{15}{5}$ কি.মি.

$= 3$ কি.মি.

আবার, স্রোতের প্রতিকূলে,

8 ঘণ্টায় অতিক্রম করে 15 কি.মি.

$\therefore$ 1 ঘণ্টায় অতিক্রম করে $\frac{15}{8}$ কি.মি.

$= 1.875$ কি.মি.

(i) ও (ii) সমীকরণে মান দ্বয় বসিয়ে পাই,

$a + b = 3$

$a - b = 1.875$

$2a = 4.875$

বা, $a = 2.4375$ (প্রায়)

(i) ও (ii) সমীকরণে বিয়োগ করে পাই,

$$a + b = 3$$
$$a - b = 1.875$$

$$2b = 1.125$$
$$b = 0.5625 \quad \text{(প্রায়)}$$

৬. ক একটি কাজ P দিনে এবং খ 2P করে দিনে। তারা কাজটি আরম্ভ করে এবং কয়েকদিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে গেল। বাকি কাজটুকু খ r দিনে শেষ করে।

ক. ক ও খ একত্রে দিনে কাজটি কত অংশ করে?

খ. কাজটি কপ্ত দিনে শেষ হয়েছিলো ?

গ. যদি ক ও খ স্রোতের কাজটি s দিনে শেষ করতে পারে। খ একা কাজটি কত দিনে করতে পারবে? যেখানে ক কাজটি t দিনে করতে পারে।

সমাধান

ক) ক P দিনে করে 1টি কাজ

$\therefore$ ক 1 দিনে করে $\frac{1}{P}$ অংশ কাজ

খ 2P দিনে করে 1টি কাজ

$\therefore$ খ 1 দিনে করে $\frac{1}{2P}$ অংশ কাজ

$\therefore$ ক ও খ একত্রে করে $\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{2P}\right)$ কাজ

$= \frac{2+1}{2P}$ অংশ কাজ

$= \frac{3}{2P}$ অংশ কাজ

খ) ‘ক’ হতে পাই,

ক ও খ একত্রে 1 দিনে করে $\frac{3}{2P}$ অংশ কাজ

$\therefore$ ক ও খ একত্রে 2 দিনে করে $2 \times \frac{3}{2P}$ অংশ কাজ

$= \frac{6}{2P}$ অংশ কাজ

$\therefore$ কাজ বাকী রয়েছে $\left(1 - \frac{6}{2P}\right)$ অংশ কাজ

$= \frac{2P-6}{2P}$ অংশ কাজ

$\frac{2P-6}{2P}$ অংশ খ শেষ করে ক দিনে

$\therefore$ 1 বা সম্পূর্ণ অংশ খ শেষ করে $\frac{r}{\frac{2P-6}{2P}}$ দিনে

$= r \times \frac{2P}{2P-6}$

$= \frac{2Pr}{2P-6}$ **(Ans.)**

গ) ক t দিনে করে 1 টি কাজ

$\therefore$ ক 1 দিনে করে $\frac{1}{t}$ অংশ কাজ

ক ও খ একত্রে কাজটি S দিনে করতে পারে

ধরি, খ একা কাজটি x দিনে করে একটি কাজ

$\therefore$খ 1 দিনে করে $\frac{1}{x}$ অংশ কাজ

প্রশ্নমতে,

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{x} = S$$

বা, $\frac{1}{x} = S - \frac{1}{t}$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{St-1}{t}$

বা, $x = \frac{t}{st-1}$ **(Ans.)**

SOLVED MCQ

১. $f(a) = a^3 - 7a + 6$ এবং $f(1) = 0$ হলে এর উৎপাদিত বিশ্লেষিত রূপ নিচের কোনটি?

(ক) $(a-2)(a-1)(a+3)$ ✓

(খ) $(a+1)(a+2)(a+3)$

(গ) $(a+1)(a+1)(a-3)$

(ঘ) $(a-1)(a+2)(a-3)$

তথ্য ব্যাখ্যা : $f(a) \to a^3 - 7a + 6$

$\therefore f(1) = 1^3 - 7 \times 1 + 6 = 0$

$\therefore a = 1$ হলে, $(a-1), f(a)$ এর উৎপাদক হবে।

সুতরাং উৎপাদক গুলো হচ্ছে $(a-2)(a-1)(a+3)$

২. $y^4 - 4y + 3$ এর উৎপাদিত বিশ্লেষিত রূপ কোনটি?

(ক) $(y-1)(y^3+y^2+y-3)$ ✓

(খ) $(y+1)(y^3+y^2+y-3)$

(গ) $(y-1)^2\,(y^2+2y+3)$

(ঘ) $(y+1)^2\,(y^2+2y-3)$

তথ্য ব্যাখ্যা : $y^4 - 4y + 3$

$= y^4 + y^3 - 4y - y^3 - y^2 + 3$

$= y^4 + y^3 + y^2 - 3y + 3 - y^3 - y^2 - y$

$= y(y^3 + y^2 + y - 3) - 1(-3y^3 + y^2 + y)$

$= (y-1)(y^3 + y^2 + y - 3)$

৩. $x(2x-3)=\frac{1}{2}$ হলে,

i. $4x^2-\frac{1}{4x^2}=3\sqrt{13}$

ii. $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^2=13$

iii. $4x^2+\frac{1}{4x^2}=11$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii ✔

তথ্য ব্যাখ্যা : $x(2x-3)=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow (2x-3)=\frac{1}{2x}$$

$$\Rightarrow 2x-\frac{1}{2x}=3$$

$$\therefore \left(2x+\frac{1}{2x}\right)^2=\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^2+4.2x.\frac{1}{2x}$$

$$\therefore 2x+\frac{1}{2x}=\sqrt{3^2+4}$$

$$=\sqrt{13}$$

(i) সঠিক কারণ , $4x^2-\frac{1}{4x^2}=\left(2x+\frac{1}{2x}\right)\left(2x+\frac{1}{2x}\right)=3\sqrt{13}$

(ii) সঠিক কারণ , $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2=13$

(iii) সঠিক কারণ, $4x^2+\frac{1}{4x^2}=\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^2-2.2x.\frac{1}{2x}=11$

8. $(a+b+c)^2 = 83$ এবং $ab+bc+ca = 71$ হলে,

i. $2(\mathrm{ab}+\mathrm{bc}+\mathrm{ca}) = 142$

ii. $(a+b+c)^2 = 225$

iii. $a+b+c = 15$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

তথ্য ব্যাখ্যা :

(ii) সঠিক → $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 83+142 = 225$

(iii) সঠিক → $(a+b+c)^2 = 225$

বা, $(a+b+c)^2 = 15^2$

বা, $a+b+c = 15$

৫. $x+\frac{1}{x} = 10$ হলে, x =কত?

(ক) $6 \pm 2\sqrt{6}$ (খ) $5 \pm 4\sqrt{6}$ (গ) $3 \pm 2\sqrt{6}$ (ঘ) $1 \pm 2\sqrt{6}$

তথ্য ব্যাখ্যা : $x+\frac{1}{x} = 10$

$$\therefore x+\frac{1}{x} = \sqrt{10^2+4}$$

$$= \pm 4\sqrt{6}$$

$$\therefore x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x} = 10 \pm 4\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow 2x = 10 \pm 4\sqrt{6}$$

$$\therefore x = 5 \pm 4\sqrt{6}$$

৬. $x = 7 + 4\sqrt{3}$ হলে $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ এর মান কত?

(ক) $2\sqrt{3}$ (খ) 4 (গ) $8\sqrt{3}$ (ঘ) 14

তথ্য ব্যাখ্যা : $x = 7 + 4\sqrt{3}$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{7-4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}$

$= \frac{7-4\sqrt{3}}{(7)^2-(4\sqrt{3})^2}$

$= 7 - 4\sqrt{3}$

$\therefore x + \frac{1}{x} = 7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 14$

$\Rightarrow (\sqrt{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 14$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2.\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}} = 14$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 14 - 12$

$\therefore \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{3}$

৭. $f(x) = x^2 - \left(b + \frac{1}{x}\right)x + 1$ হলে, x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?

(ক) $b, 1$ (খ) $b, 0$ (গ) $b, \frac{1}{b}$ (ঘ) $\frac{1}{b}, b$

তথ্য ব্যাখ্যা : $x^2 - \left(b + \frac{1}{b}\right)x + 1 = 0$

বা, $x^2 - bx - \frac{1}{b}x + \frac{b}{b} = 0$

বা, $x(x - b) - \frac{1}{b}(x - b) = 0$

বা, $(x - \frac{1}{b})(x - b) = 0$

$\therefore x = \frac{1}{b}, b$

৮. $y^2 - 2ay + (a+b)(a-b)$ এর সঠিক উৎপাদক নিচের কোনটি?

(ক) $(b-a+b)(y-a-b)$ ✔
(খ) $(y-a-b)(y+a+b)$

(গ) $(y-a+b)(y+a+b)$
(ঘ) $(y+a+b)$

তথ্য ব্যাখ্যা : $y^2 - 2ay + (a+b)(a-b)$

$= y^2 - 2ay + a^2 - b^2$

$= (y^2 - 2ay + a^2) - b^2$

$= (y-a)^2 - b^2$

$= (b-a+b)(y-a-b)$

৯. $f(x)$ কে $(x+a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল $r(x)$ এবং ভাগশেষ r হলে নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক?

(ক) $f(x) = (x+a).r(x) - a$
(খ) $f(x) = (x+a).r(x)$

(গ) $r(x) = f(x).(x+a) + r$
(ঘ) $f(x) = (x+a)r(x) + r$ ✔

১০. $x^3 - x - 6$ এর উৎপাদিত বিশ্লেষিত রূপ কোনটি?

(ক) $(x-2)(x^2+2x-3)$
(খ) $(x+2)(x^2+2x-3)$

(গ) $(x-2)(x^2+2x+3)$ ✔
(ঘ) $(x+2)(x^2+2x+3)$

তথ্য ব্যাখ্যা : $x^3 - x - 6 = x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 3x - 6$

$= x^2(x-2) + 2x(x-3) + 3(x-2)$

$= (x-2)(x^2+2x+3)$

১১. 'A' একটি কাজ x দিনে করতে পারে । 'B' ঐ কাজ y দিনে করতে পারে । তারা একত্রে কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে?

(ক) xy দিনে

(খ) $(x-y)$ দিনে

(গ) $\frac{xy}{x+y}$ দিনে

(ঘ) $\frac{x+y}{xy}$ দিনে

তথ্য ব্যাখ্যা : A , x দিনে করে 1টি কাজ

$\therefore$ A , 1 দিনে করে $\frac{1}{x}$ অংশ কাজ

আবার , B, y দিনে করে 1টি কাজ

$\therefore$ B , 1 দিনে করে $\frac{1}{y}$ অংশ কাজ

$\therefore$ A ও B একত্রে 1 দিনে করে $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ অংশ কাজ

$= \frac{x+y}{xy}$ $= \frac{xy}{x+y}$

$\therefore \frac{x+y}{xy}$ অংশ কাজ একত্রে করে 1 দিনে

$\therefore$ (1 বা সম্পূর্ণ) অংশ কাজ একত্রে করে $\frac{1}{\frac{x+y}{xy}}$ দিনে

১২. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 4:3 তাদের ল.সা.গু 180 হলে, বড় সংখ্যাটি কত?

(ক) 45 (খ) 50 (গ) 55 (ঘ) 60

তথ্য ব্যাখ্যা : ধরি বড় সংখ্যা $= 4x$, ছোট সংখ্যা $= 3x$

সংখ্যা দুটির গ.সা.গু. $= x$

প্রশ্নমতে, $4x.3x = x.180$

বা, $12x = 180$

$\therefore x = 15$

$\therefore$ বড় সংখ্যা $= 4 \times 15 = 60$

১৩. টাকায় 15টি আমলকী ক্রয় করে টাকায় 20টি আমলকী বিক্রি করলে শতকরা কত ক্ষতি হয়?

(ক) 10　　(খ) 15　　(গ) 20　　(ঘ) 25

তথ্য ব্যাখ্যা : 15 টির ক্রয়মূল্য 1 টাকা

$\therefore$ 1 টির ক্রয়মূল্য $\frac{1}{15}$ টাকা

20 টির বিক্রয়মূল্য 1 টাকা

$\therefore$ 1 টির বিক্রয়মূল্য $\frac{1}{20}$ টাকা

$\therefore$ $\frac{1}{15}$ টাকায় ক্ষতি $= \frac{1}{15} - \frac{1}{20}$ টাকা

$= \frac{1}{60}$ টাকা

$\therefore$ 100 টাকায় ক্ষতি $= \frac{100 \times 15}{60}$ টাকা

$= 25$ টাকা

১৪. টাকায় 12টি লেবু বিক্রয় করায় 4% ক্ষতি হয় । 44% লাভ করতে হলে টাকায় কয়টি লেবু বিক্রি করতে হবে?

(ক) 9টি　　(খ) 10টি　　(গ) 11টি　　(ঘ) 4টি

১৫. 3 জন পুরুষ এবং 5 জন বালক একটি কাজ 9দিনে করতে পারে । 9 জন পুরুষ ও 15 জন বালক ঐ কাজটি কত দিনে করতে পারবে?

(ক) 9　　(খ) 10　　(গ) 3　　(ঘ) 4

তথ্য ব্যাখ্যা : 3 জন পুরুষ ও 5 জন বালক বালক একটি কাজ করে 9 দিনে

3x (3 জন পুরুষ ও 5 জন বালক বালক একটি কাজ করে) $= \frac{9}{3}$ দিনে

$= 3$ দিনে

১৬. 10% হার মুনাফায় 200 টাকার 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি মুনাফা টাকা হলে-

i. সরল মুনাফা 60 টাকা

ii. চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় সবৃদ্ধি মূলধন 266.20 টাকা

iii. চক্রবৃদ্ধি মুনাফা ও সরল মুনাফার 6.20 পার্থক্য টাকা

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii　　(খ) i ও iii　　(গ) ii ও iii　　(ঘ) i, ii ও iii

১৭. একটি কাজ রহিম p দিনে ও করিম 2p দিনে করে। তারা কাজটি একত্রে আরম্ভ করে এবং কয়েকদিন পর রহিম চলে গেলে বাকি কাজ করিম r দিনে করে। কাজটি কত দিনে সমাপ্ত হয়েছিলো ?

(ক) $\frac{p+r}{3}$　　(খ) $\frac{2p+r}{3}$　　(গ) $\frac{3(p+r)}{2}$　　(ঘ) $\frac{2(p+r)}{3}$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (18-19) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

❑ টেলিফোন কলের সংখ্যা 210 প্রতি কলের মূল্য 1.50 টাকা তার ভাড়া টাকা 150 এবং ভ্যাট 15%

১৮. তার ভাড়াসহ কলের মূল্য কত?

(ক) 565 টাকা　　(খ) 456 টাকা　　(গ) 465 টাকা　　(ঘ) 556 টাকা

তথ্য ব্যাখ্যা : কলের সংখ্যা = 210

প্রতি কলের মূল্য = 1.50 টাকা

∴ মোট কলের মূল্য = 210 × 1.50 = 315 টাকা

ভাড়া = 150 টাকা

∴ ভাড়াসহ কলের মূল্য = 315 + 150 = 465 টাকা

১৯. মোট বিলের পরিমান কত?

(ক) 534.75 টাকা (খ) 454.65 টাকা (গ) 554.65 টাকা (ঘ) 444.69 টাকা

তথ্য ব্যাখ্যা : ভাড়াসহ কলের মূল্য 465 টাকা

ভ্যাট 15% অর্থাৎ $\frac{15}{100}$

$\therefore$ মোট ভ্যাটের পরিমাণ $= 465 \times \frac{19}{100} = 69.75$ টাকা

$\therefore$ মোট বিলের পরিমাণ $= 465 + 69.75 = 534.75$ টাকা

২০. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল সংযুক্ত আছে । ১ম নলটি দ্বারা চৌবাচ্চাটি m মিনিটে পূর্ণ হয় এবং ২য় নলটি দ্বারা n মিনিটে খালি হয়। দুইটি নল একসাথে খুলে দিলে কত মিনিটে পূর্ণ হবে?

(ক) $\frac{n-m}{mn}$ (খ) $\frac{m-n}{mn}$ (গ) $\frac{mn}{m-n}$ (ঘ) $\frac{mn}{n-m}$

২১. $x + y = 3$ এবং $xy = 1$ হলে, $x^3 + y^3 + (x-y)^2$এর মান কত?

(ক) 23 (খ) 31 (গ) 41 (ঘ) 49

তথ্য ব্যাখ্যা : $x^3 + y^3 + (x-y)^2$

$= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + (x+y)^2 - 4xy$

$= 3^3 - 3 1.3 + 3^2 - 4.1$

$= 23$

২২. $a + b = \sqrt{3}$ এবং $a^2 - ab + b^2 = \sqrt{12}$ হলে, $a^3 + b^3 =$ কত?

(ক) 3 (খ) 4 (গ) 5 (ঘ) 6 ✔

তথ্য ব্যাখ্যা : $a + b = \sqrt{3}$

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 3 \; \ldots.(i)$

আবার, $a^2 - ab + b^2 = \sqrt{12} \; \ldots.(ii)$

$(i) - (ii) \Longrightarrow 3ab = 3 - \sqrt{12}$

$\therefore \; ab = 3 - \sqrt{12}$

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$= (\sqrt{3})^3 - 3.3 - \sqrt{12}.\sqrt{3}$

$= 6$

২৩. $a^3 - b^3 = 513$ এবং $a - b = 3$ হলে, $ab =$কত?

(ক) 54 (খ) -54 ✔ (গ) 252 (ঘ)168

তথ্য ব্যাখ্যা : $a - b = 3$

$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 9$

$\therefore a^2 + b^2 = 9 + 201 \; \ldots\ldots(i)$

$a^2 - b^2 = 513 \; \ldots\ldots(ii)$

$\Rightarrow (a - 1)(a^2 + ab + b^2) = 513$

$\Rightarrow 3.(9 + 2ab + ab) = 513$

$\Rightarrow 9 + 3ab = 171$

$\therefore ab = -54$

২৪. যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে নিচের কোনটি $a^3 + b^3 + c^3$ এর মান কোনটি?

(ক) 0 (খ) 3 (গ) $3abc$ ✔ (ঘ) $\frac{3}{abc}$

তথ্য ব্যাখ্যা : $a + b + c = 0$

$\Rightarrow a + b = -c$

$\Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3(a + b)ab = -c^3$

$\Rightarrow a^3 + b^3 - 3abc = -c^3$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

২৫. $2\sqrt{3}x^3 + 125$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ নিচের কোনটি?

(ক) $(\sqrt{2}x + 5)(2x^2 - 5\sqrt{2}x + 25)$

(খ) $(\sqrt{2}x + 5)(2x^2 + 5\sqrt{2}x + 25)$

(গ) $(\sqrt{2}x + 5)(2x^2 + 5\sqrt{2}x + 25)$

(ঘ) $(\sqrt{2}x - 5)(2x^2 - 5\sqrt{2}x + 25)$

তথ্য ব্যাখ্যা : $2\sqrt{2}x^3 + 125$

$$= (\sqrt{2x})^3 + 5^3$$

$$= (\sqrt{2}x + 5)\left\{(\sqrt{2x})^2 - \sqrt{2}x.5 + 5^2\right\}$$

$$= (\sqrt{2}x + 5)(2x^2 - 5\sqrt{2}x + 25)$$

২৬. $x^3 - x - 6$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ নিচের কোনটি?

(ক) $x^2 + 5x + 6$

(খ) $x + 2$

(গ) $x^2 + 4x + 2$

(ঘ) $x^2 + 2x + 3$

তথ্য ব্যাখ্যা : $x^3 - x - 6$

$$= x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 3x - 6$$

$$= x^2\ (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

২৭. $a^3 - \frac{1}{8}$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ নিচের কোনটি?

(ক) $(2a-1)(4a^2+2a+1)$

(খ) $\frac{1}{8}(2a-1)(2a^2+a+1)$

(গ) $(a-1)(2a^2+a+1)$

(ঘ) $\frac{1}{8}(2a-1)(4a^2+2a+1)$ ✔

তথ্য ব্যাখ্যা : $a^3 - \frac{1}{8} = 8a^3 - \frac{1}{8}$

$= \frac{1}{8}(8a^3-1)$

$= \frac{1}{8}\{(2a)^3-(1)^3\}$

$= \frac{1}{8}(2a-1)(4a^2+2a+1)$

২৮. যদি $f(x) = x^2+5x+6$ এবং $f(x) = 0$ হলে, x এর মান কত?

(ক) $a \neq 0$ ✔

(খ) $a = 0$

(গ) $a > 0$

(ঘ) $a < 0$

২৯. $f(x) = 54x^4 + 27x^3a - 16x8a$, নিচের কোনটি $f(x)$ এর একটি উৎপাদক?

(ক) $(2x - a)$ (খ) $(2x + a)$

(গ) $(3x - a)$ (ঘ) $(3x + a)$

তথ্য ব্যাখ্যা : $f(x) = 54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

$$\therefore f\left(\frac{-a}{2}\right) = 54\left(\frac{-a}{2}\right)^4 + 27\left(\frac{-a}{2}\right)^3 a - 16\left(\frac{-a}{2}\right) - 8a$$

$$= 54.\frac{a^4}{16} + 27\frac{-a^3}{8}.a + 8a - 8a$$

$$= \frac{27a^4}{8} - \frac{27a^4}{8}$$

$$= 0$$

$\therefore \left(x + \frac{a}{2}\right)$ বা, $(2x + a), f(x)$ এর একটি উৎপাদক

৩০. নৌকা দাঁড় বেয়ে স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 15 km. এবং 5 ঘণ্টায় 25 km. যায়। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় km. কত?

(ক) 20 (খ) 10 (গ) 5 (ঘ) 9

৩১. যদি $a + b = \sqrt{5}$ এবং $a - b = \sqrt{3}$ হয়, তবে $a^2 + b^2 =$ কত?

(ক) 2

(খ) 9

(গ) 4 ✓

(ঘ) 64

৩২. $9x^2 + 30x$ এর সাথে কমপক্ষএ কত যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ হবে?

(ক) 100

(খ) 64

(গ) 36

(ঘ) 25 ✓

তথ্য ব্যাখ্যা : $9x^2 + 30x = (3x)^2 + 2.3x.5 + 5^2 - 5^2$

$= (3x + 5)^2 - 25$

$\therefore$ 25 যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ হবে।

৩৩. $p + r = 5, p - r = 3$ হলে $p^2 + r^2$ এর মান কত?

(ক) 34

(খ) 19

(গ) 17 ✓

(ঘ) 8

তথ্য ব্যাখ্যা : $2(p^2 + r^2) = (p + r)^2 + (p - r)^2$

$= 5^2 + 3^2$

$= 34$

$\therefore p^2 + r^2 = \frac{34}{2} = 17$

৩৪. $\frac{1}{p} = \sqrt{5} + 2$ হলে, p এর মান কত?

(ক) $2 - \sqrt{5}$

(খ) $\sqrt{5} + 2$

(গ) $\sqrt{5} - 2$ ✔

(ঘ) $5 - \sqrt{2}$

তথ্য ব্যাখ্যা : $\frac{1}{p} = \sqrt{5} + 2$

$\therefore p = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{1(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5})^2-(2)^2} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \sqrt{5} - 2$

৩৫. $a + b + c = 0$ হলে, $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$ এর মান কত?

(ক) -1 ✔

(খ) 0

(গ) 1

(ঘ) 2

তথ্য ব্যাখ্যা : $a + b + c = 0$

$\Rightarrow a + b = -c$

$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{-c}{c}$

$\therefore \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = -1$

৩৬. $x + \frac{1}{x} = 2$ হলে, x এর মান কত?

(ক) -1

(খ) 1 ✔

(গ) $\frac{1}{2}$

(ঘ) 0

তথ্য ব্যাখ্যা : $x + \frac{1}{x} = 2 \;\ldots (i)$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4$$

$$= 2^2 - 4 = 0$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = 0 \ldots\ldots (ii)$$

$$(i) + (ii) = 2x = 2$$

$$\therefore x = 1$$

৩৭. $\left(2a + \frac{2}{a}\right)^2 = 12$ হলে, $a^2 + \frac{1}{a^2}$ এর মান কত?

(ক) 3

(খ) $2\sqrt{3}$

(গ) $\sqrt{3}$

(ঘ) 1 ✔

তথ্য ব্যাখ্যা : $\left(2a + \frac{2}{a}\right)^2 = 12$

$$\Rightarrow \left\{2\left(a + \frac{2}{a}\right)\right\}^2 = 12$$

$$\Rightarrow 4\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 12$$

$$\Rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 1$$

৩৮. $x + y + z = 10, x^2 + y^2 + z^2 = 80$ হলে, $xy + yz + zx$ এর মান কত?

(ক) 10 (খ) 20

(গ) 90 (ঘ) 190

তথ্য ব্যাখ্যা : $2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

$= 10^2 - 80 = 120$

$\therefore xy + yz + zx = \frac{20}{2} = 10$

৩৯) $a + \frac{1}{a} = 5$ হলে $\frac{a}{a^2+a+1}$ এর মান কত?

ক) $\frac{1}{6}$ খ) 0 গ) -1 ঘ) $-\frac{1}{6}$

তথ্য ব্যাখ্যা : $a + \frac{1}{a} = 5 \Rightarrow a^2 + 1 = 5a$

তাহলে, $\frac{a}{a^2+a+1} = \frac{a}{2a+a} = \frac{a}{6a} = \frac{1}{6}$